CHAPITRE

4

Séries entières

1 Définitions

Définition 0

On appelle série entiére toute série de fonction $\sum_{n}^{+\infty} U_n(x)$ dont le terme général $U_n(x)$ est de la forme $U_n(x) = a_n x^n$ avec $(a_n)_n$ une suite réelle (ou complexe) et $x \in \mathbb{R}$.

Notation : On note cette série par $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$, comme pour les séries on cherche l'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{converge}\}$

qu'on appelle domaine de convergences de la série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$

2 Exemple

Exemple 1 :

On considére la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On pose $U_n(x) = a_n x^n = \frac{x^n}{n!}$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} |\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}| &= \lim_{n\to+\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}| \qquad (x \neq 0) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} \\
|x| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} &= 0 < 1.
\end{aligned}$$

D'aprés la regle de d'Alembert,on a $(0 < 1)$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est convergente pour $x \neq 0$

Pour $x = 0$ on a la série CV car $(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0)$. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où $I = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{converge} = \mathbb{R}\}$.

Exemple 2 :

On considére la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On pose $U_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.\frac{n^2}{x^n}\right| \qquad (x\neq 0)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|.$$

D'aprés la regle de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ converge si $|x|< 1$ et diverge si $|x|> 1$

* Si $x = 0$, la série converge aussi.
*Si $x = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est une Série de Rieman Convergente.
*Si $x = -1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ est une Série altérnée CV.
Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ Converge si $x \in [-1, 1]$

Exemple 3 :

Soit la série $\sum_{n}^{+\infty} n!x^n$ on pose que $U_n(x) = n!x^n$
On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \qquad (x\neq 0)$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

D'aprés la regle de d'Alembert, la série $\sum|U_n(x)|$ est divergente pout tout $x \neq 0$.
* Si $x = 0$, la série converge.
Donc $I = \{0\}$, c. à. d la série $\sum n!x^n$ C.V si $x = 0$.

Exemple 4 :

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ on pose que $U_n(x) = \frac{x^n}{n}$
On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{x^n}\right| \qquad (x\neq 0)$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = |x|.$$

D'aprés la regle de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ converge si $|x|< 1$ et diverge si $|x|> 1$

* Si $x = 0$, alors la série converge aussi.
*Si $x = 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ est une Série divergente.
*Si $x = -1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est une Série altérnée Convergente.

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ Converge si $x \in [-1, 1[$
Donc $I = [-1, 1[$

On a le lemme Suivante :

3 Lemme

[(Lemme d'Abel] Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ une série entiére. On suppose qu'il $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq la suite $(a_n x_0^n)$ est bornnée C. a. d. $\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_0^n| \leq M$

1. La série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument si $|x| < |x_0|$

2. La série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$, pour tout $0 < r < |x_0|$.

Preuve :
1)- Soit $x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < |x_0|$,
On a :

$$\begin{aligned}
|a_n x^n| &= |a_n \frac{x_0^n}{x_0^n} x^n| \\
&= |a_n x_0^n| \times |\frac{x^n}{x_0^n}| \\
&= |a_n x_0^n| \times |\frac{x}{x_0}|^n \\
&\leq M |\frac{x}{x_0}|^n
\end{aligned}$$

Car la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée.
On a la Série $\sum_{n}^{+\infty} M |\frac{x}{x_0}|^n$ est une série geometrique convergente si $|\frac{x}{x_0}| < 1$
(Ou bien applique la regle de Cauchy)
C. à. d. Si $|x| < |x_0|$
Par le Théoréme de comparaison si $|x| < |x_0|$ on a $\sum_{n}^{+\infty} |a_n x_n|$ est aussi convergente.
Finalement $\sum_{n}^{+\infty} a_n x_n$ C. V. absolement si $|x| < |x_0|$.
2- Soit $0 < r < |x_0|$ et $|x| < r$

On a :

$$\begin{aligned}
|a_nx^n| &= |a_nx_0^n\frac{x^n}{x_0^n}| \\
&= |a_nx_0^n|\times|\frac{x^n}{x_0^n}| \\
&= |a_nx_0^n|\times|\frac{x}{x_0}|^n \\
&= |a_nx_0^n|\times\frac{|x|^n}{|x_0|^n} \\
&\leq M|\frac{r^n}{|x_0|^n} \\
&= M(\frac{r}{|x_0|})^n
\end{aligned}$$

Car la suite $(a_nx_0^n)$ est bornée par M et $|x|< r$.
$\Rightarrow \sup_{x\in]-r,r[}|a_nx^n|\leq (\frac{r}{|x_0|})^n$.
Or la série $\sum M(\frac{r}{|x_0|})^n$ est une sé rie C.V car $\frac{r}{|x_0|} < 1 \Rightarrow r < |x_0|$ Par le Théorème de comparaison , on a $\sup_{x\in]-r,r[}|a_nx^n|$ converge.

Alors la série $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ converge normalement sur $]-r,r[$, $\quad \forall 0 < r < |x_0|$.

C. à. d. la série $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ converge normalement si $|x|< r$ pour tout $0 < r < |x_0|$.

$\square$

4 Rayon de Convergence d'une Série entiére.

Théorème 0

Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ une série entiére, alors il existe un unique nombre reél $R \geq 0$ (eventiellement infini) tq :

1. La série $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ converge absolument sur $]-R,R[$ C. à. d. $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ converge absolument si $|x|< R$.
2. $\sum_{n}^{+\infty} a_nx_n$ diverge si $|x|> R$

Preuve :

Soit

$$\begin{aligned}
I &= \{r\in\mathbb{R}^+, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}|a_n|r^n < +\infty\} \\
&= \{r\in\mathbb{R}^+, \quad \exists M\in\mathbb{R}^+ : \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad |a_n|r^n \leq M\}.
\end{aligned}$$

On a $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$
alors I admet unr borne supérieur dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on le note $\sup(I) \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

En fait I un intervalle de borne inférieure 0.
En effet : soit $r, r' \in I, \quad , t \in \mathbb{R}$
Montrons que $r \leq t \leq r' \Rightarrow ?t \in I$ c. à. d $\sup |a_n| t^n < +\infty$.

On a

$$\begin{aligned} r \leq t \leq r' &\Rightarrow r^n \leq t^n \leq (r')^n \\ &\Rightarrow 0 \leq |a_n| r^n \leq |a_n| t^n \leq |a_n| (r')^n \\ &\Rightarrow \sup |a_n| r^n \leq \sup |a_n| t^n \sup |a_n| (r')^n < +\infty \\ &\Rightarrow t \in I. \end{aligned}$$

On pose : $R = \sup(I)$

*- Si $|x| > R$, alors $|x| \notin I$ alors la suite $(a_n x^n)_n$ n'est pas bornée.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n x^n \neq 0$
$\Rightarrow$ la série $\sum_n a_n x^n$ est divergente.

*- Si $|x| < R$, soit $r \in \mathbb{R}$ tq $0 \leq |x| < r < R$, alors $r \in I$ (car I est un intervalle de borne sup R) donc la suite $(a_n x^n)_n$ est bornée disont par exemple par M.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, \text{tq}, \quad |x| < r < R$,

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n| r^n |\frac{x}{r}|^n \\ &\leq M |\frac{x}{r}|^n. \end{aligned}$$

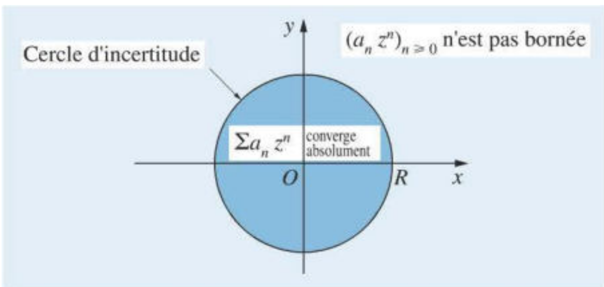
Or la série $\sum_n M |\frac{x}{r}|^n$ est une série geometrique convergente puisque $|\frac{x}{r}| < 1$.
Donc $\sum_n |a_n x^n|$ est une série convergente par le théoréme de comparaison , D'où la série $\sum_n a_n x^n$ est absolument convergente si $|x| < R$.
□

Définition 0

Le nombre $R = \sup_{\mathbb{R}^+} \{r \in \mathbb{R}^+, \quad \sup_n |a_n| r^n < +\infty\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appellé le rayon de convergence de la série entiére $\sum a_n x^n$.

Remarque 4.1

Si $x \in \mathbb{C}$, et si $R \neq 0$, on appelle disque de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$, le disque ouvert $D(o, R)$ de centre o et de rayon R.



Remarque 4.2

Le rayon de convergence$R$ de la série $\sum a_n x^n$ est caractérisé par :

*- $|x|< R \Rightarrow$ La série $\sum a_n x^n$ converge absolument.
*- $|x|> R \Rightarrow$ La série $\sum a_n x^n$ diverge.
*- $|x|= R$ On peut rien dire. pour la convergence de la série.
*- pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$ la série $\sum a_n x^n$ C.V. normalement (donc absolument) si $|x|\leq r$
En effet : Soit $|x|< r$:
$|a_n x^n|= |a_n||x|^n \leq |a_n|r^n$
Or $r < R$, alors la série $\sum a_n r^n$ C. V. absolument et comme $\sup_{x\in]-r,r[}|a_n x^n|\leq |a_n|r^n$
alors la série $\sum_n \sup_{x\in]-r,r[}|a_n x^n|$ converge. i.e La série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $]-r, r[, \quad \forall r < R$
*- si $R = 0$, La série $\sum a_n x^n$ C. V. que si $x = 0$.
*- si $R = +\infty$ La série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

5 Détermination de rayon de convergence

On a le lemme suivant :

Lemme 2

Lemme d'Hadamard

Soit la série entiére $\sum a_n x^n$, Le rayon de convergence est donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Preuve :

Posons $l = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$
On a, par "le regle de d'Alenbert"

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}|= \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x|= l|x|$$

Donc
-la série $\sum a_n x^n$ converge absolument si $l|x|< 1$ C. à d. $|x|< \frac{1}{l}$.
- la série $\sum a_n x^n$ diverge si $|x|> \frac{1}{l}$.
Par unicité de rayon de convergence on a alors $R = \frac{1}{l}$ C. à d.

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|= l = \frac{1}{R}$$

De la même maniére, par la régle de Cauchy $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$
□

Exemple :

1)- Considerons la série entiére $\sum_{n}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on pose $a_n = \frac{1}{n!}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Alors $R = +\infty$ et donc la série converge absolument pour tout x.

2)- Soit la série entiére $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, on pose $a_n = \frac{1}{n^2}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

Donc le rayon de convergence $R = \frac{1}{1}$

C. à. d. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ C.V absolument si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

La série C.V normalement si $|x| \leq r$ pour tout $r < 1$.

6 Théorème fondamentaux pour les séries entiéres

Ce paragraphe étudie les propriétés de continuité, dérivabilité et Intégrabilité de la somme d'une série entière.

6.1 Continuité :

Théorème 0

Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ une série entiére de Rayon de convergence R et soit $S :]-R, R[\to \mathbb{R}$ La fonction somme définie par :

$$S(x) = \sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$$

alors S est continue sur $]-R, R[$

Preuve :

Soit $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$; On a la série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement (donc uniformément) si $|x| \leq r$, $\forall \underline{r < R}$.

Donc la série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ C. V. uniformément sur $[-r, r]$, $\forall \underline{r < R}$.

On a aussi les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$, $\forall \underline{r < R}$.

Par le Théoréme de continuité pour les séries de fonctions. On a S est continue sur $[-r, r]$, $\forall \underline{r < R}$.

Alors S est continue sur $]-R, R[$.

En effet Soit $x_0 \in]-R, R[$ (c.à .d. $|x| < R$)

alors $\exists r_0 > 0 \quad \text{tq} |x_0| < r_0 < R$ (densité de $\mathbb{R}$).

$\Rightarrow x_0 \in]-r_0, r_0[\subseteq [-r_0, r_0]$, alors S est continue en x_0.

alors S est continue sur $]-R, R[$.

$\square$

6 2 Dérivabilité

Théorème 0

Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ une série entiére de Rayon de convergence R et soit $S :]-R, R[\to \mathbb{R}$ La fonction somme définie par :

$$S(x) = \sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$$

alors S est dérivable sur $]-R, R[$ et on a

$$S^{'}(x) = \sum_{n}^{+\infty} (a_n x^n)^{'} = \sum_{n}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Preuve :

On verifie les hpothese de théoreme de dérivabilité pour les séries de fonctions :

1. Les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont dérivable sur $]-R, R[$.
2. On a $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument sur $]-R, R[$ donc $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, R[$, "il existe $x_0 \in]-R, R[$ tq $\sum_{n}^{+\infty} a_n x_0^n$ converge ".
3. On verifier la CV uniforme locale sur $]-R, R[$ de la série $\sum_{n}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Soit alors $0 \leq r < R$, on verifier la CV uniforme sur $[-r, r]$, $\quad \forall r < R$ (CV U locale)
On calcule alors le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{(n+2)a_{n+2}}{(n+1)a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}| = \frac{1}{R}, \qquad \text{par déf.}$$

Donc le rayon de convergence de la série dérrivée $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est aussi R le rayon de convergence de la série $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$.

D'où la série dérrivée $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ C. V. normalement (donc uniformememt) sur $[-r, r]$, $\quad \forall r < R$.
Finalement par le Théoréme de dérivabilité pour les série de f^{ct}
On a S est dérivable sur $]-R, R[$ et on peut dérivé terme à terme la série et donc

$$S^{'}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)^{'} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \forall x \in]-R, R[$$

$\square$.

Corollaire 1

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entiére de rayon de convergence R, alors S est Infiniment dérivable (de C^∞) sur $]-R, R[$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

De plus $\forall x \in]-R, R[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)(0)}}{n!} x^n$$

On dit que la fonction S admet un développement en série entière au voisinage de 0.

Exemple

On sait que $\forall x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = (\sum_{n=1}^{+\infty} x^n)^{'} = (\frac{1}{1-x})^{'} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

6 3 Primitive d'une série entière :

Théorème 0

Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ une série entiére de Rayon de convergence R et soit $S :]-R, R[\to \mathbb{R}$ La fonction somme définie par :

$$S(x) = \sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$$

On définit la fonction $F :]-R, R[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \sum_{n}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

alors $F^{'}(x) = S(x), \qquad \forall x \in]-R, R[$.

Preuve :

Soit la série entiére $\sum_{n}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Calculons le rayons de convergence de cette série. On pose $b_n = \frac{a_n}{n+1}$
On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}|\frac{b_{n+1}}{b_n}| &= \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{n+1}\times\frac{n+1}{a_n}| \\
&= \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \\
&= \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

ou R est le rayon de convergence de la série $\sum_n^{+\infty} a_n x^n$

$$\boxed{\text{Donc la série entiére } \sum_n^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \text{ est de même rayon de C. V. que la série } \sum_n^{+\infty} a_n x^n}$$

Donc la série $\sum_n^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ est absolument convergente (donc C.V) sur $]-R, R[$ donc F est bien définie.
De plus F est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.
Et on a alors, $\forall x \in]-R, R[$

$$F^{'}(x) = \sum_n^{+\infty}(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1})^{'} = \sum_n^{+\infty} a_n x^n = S(x)$$

□

Exemple

On a $\forall x \in]-1, 1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Don $\forall x \in]-1, 1[,$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n dt \\
&= \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^n) dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t}dt \\
&= -\ln(1-x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

7 Opération sur les série entière

Proposition 4.1

Soit $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ 2 séries entières ayant respectivement R et $R^{'}$ pour rayons de convergence.

1. Si $R \neq R^{'}$ alors le rayon de convergence de la série Somme $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ est $R^{"} = \min(R, R^{'})$
2. Si $R = R^{'}$ alors le rayon de convergence de la série Somme $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ est $R^{"} \geq R = R^{'}$

Preuve :

On a $R \neq R^{'}$ supposons par exemple que $R > R^{'}$

*- Si $|x| < R^{'}$ alors $|x| < R$ donc les 2 séries $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ sont absolument convergence, mais on a

$$|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$$

donc la série $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ C. V. absolument aussi

*- Si $|x| > R^{'}$ on a alors deux cas :

1- si $|x| > R > R^{'}$

alors les 2 séries $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ sont divergentes

Dans ce cas on a aussi $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ divergente.

En effet, supposons $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ C. V. alors la suite $((a_n + b_n)x^n)_n$ est bornée, donc d'aprés le Lemme d'Abel pour les séries entière $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x_0^n$ est C.V absolument pour tout x tq $|x_0| < |x|$.
En particulier pour $R^{'} < |x_0| < R < |x|$

donc $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ C.V et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ est divergente.

$\Rightarrow \sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ est divergente (contraduction)

D'où la série $\sum_{n}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n$ est divergente si $|x| > R^{'}$ et $|x| > R > R^{'}$.

2- 2^{eme} cas si $R > |x| > R^{'}$

On a alors $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ C.V et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ est divergnte

D'où $\sum_{n}^{+\infty}(a_n+b_n)x^n$ est divergente.

Finalement si $|x|> R^{'}$ alors $\sum_{n}^{+\infty}(a_n+b_n)x^n$ est divergente.

Par unicité de rayon de CV on a alors $R" = R^{'} = \min(R, R^{'})$ Même preuve si $R^{'} < R$

D'où $\boxed{R" = \min(R, R^{'})}$.

2- Supposons que $R = R^{'}$, on a :

Si $|x|< R = R^{'}$ alors $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ sont absolument C.V

D'où $R" \geq R^{'} = R$ $\square$

Exemple :

Soient les 2 séries entière suivante : $\sum_{n}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty}(\frac{1-2^n}{2^n})x^n$

On a $\sum_{n}^{+\infty} x^n$ a pour rayon de convergente $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = 1$ avec $(a_n = 1)$.

On pose $b_n = \frac{1-2^n}{2^n}$

soit $R^{'}$ le rayon de convergence de $\sum_{n}^{+\infty}(\frac{1-2^n}{2^n})x^n$

Alors $R^{'} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{b_{n+1}}{b_n}|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{1-2^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1-2^n}|} = 1$

Donc $\boxed{R = R^{'}}$

On calculons maintenant le rayon de CV de la somme $\sum_{n}^{+\infty}(1+\frac{1-2^n}{2^n})x^n = \sum_{n}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$

$R" = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1}|} = 2.$

Théorème 0

Soient $\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n}^{+\infty} b_n x^n$ deux série entière de rayon de convergence R et $R^{'}$ respectement.
Alors $R"$ le rayon de convergence de la série produit de coeffecients $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ C. à d. la série $\sum_{n}^{+\infty} C_n x^n$ et tq $R" \geq \min(R, R^{'})$ et si $|x|< \min(R, R^{'})$ alors

$$\boxed{\sum_{n}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n}^{+\infty} C_n x^n}$$

avec $\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$

8 Série de Taylor :

Problème : Soit f une fonction réelle à variable réelle x. Peut-on trouver $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que

$$f(x) = \sum_{n}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in]-r, r[$$

Si ce probléme admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.

On a le Théorème suivant :

Théorème 0

soit $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ une application de C^∞ .
On suppose qu'il existe un $M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-r, r[, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$
Alors :
La Série $\displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge simplement sur $]-r, r[$ et on a

$$f(x) = \sum_{n}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \forall x \in]-r, r[$$

Preuve :

On a f est de C^∞ au voisinage de 0, alors d'aprés la formmule de Mac-Laurin on a :

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

avec $0 < \theta < 1$
Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

avec $0 < \theta < 1$
$\Rightarrow |f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k| = |\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}|$

Pour $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ il faut que $\lim\limits_{n \to +\infty} |\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}| = 0$

Pour cela on a,
$|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ puisque $f^{(n)}$ est bornée par M et $|\theta x| = \theta |x| < r$ (car $\theta < 1$) $\Rightarrow \theta x \in]-r, r[$

Or la série $\displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$

D'où $\displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \Rightarrow \sum_{n}^{+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Par conséquant $\lim\limits_{n \to +\infty} |\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}| = 0$

Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$$
puisque $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge vers $(f(x) \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \forall x \in]-r, r[}$$
□

Exemple 1 :

Soit la fonction exponontielle $f : x \mapsto e^x$ la fonction est de C^∞ sur $\mathbb{R}$ et On a $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$
On a f est de C^∞, donc d'aprés la formule de Mac-Laurin
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad 0 < \theta < 1$$
Montrons que $\lim_{n\to+\infty} |\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}| = 0$

on a si $x > 0 \qquad e^{\theta x} \leq e^x$ car $0 < \theta < 1$ et si $x \leq 0 \qquad e^{\theta x} \leq 1$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{\theta x} \leq \max(1, e^x)$

alors $|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}| \leq \max(1, e^x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} |\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}| = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$
Le rayon de convergence de cette série est $R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}} = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow R = +\infty$

Donc
$$e^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Exemple 2 : [Fonctions hyperboliques]

La fonction Sinus hyperbolique et Cosinus hyperboliques ont même rayon de C. V. que la fonction $x \mapsto e^x$ c.à.d $R = +\infty$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

On a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$\Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$\Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}}$$

On a aussi

$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Exemple 3 : Les Fonctions Circulaires

*-**Fonction Sinus** On pose :

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f^{'}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{'}(0) = 1$$

$$f^{''}(x) = -\sin \Rightarrow f^{''}(0) = 0$$

$$f^{'''}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{'''}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$

$$f^{(4p)}(0) = 0$$

$$f^{(4p+1)}(0) = 1$$

$$f^{(4p+2)}(0) = 0$$

$$f^{(4p+3)}(0) = -1$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x) \leq 1$ de plus la fonction f est de C^{∞} d'aprés le Théorème precédent

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Le rayon de C.V. de cette série est aussi $R = +\infty$

*-Fonction Sinus De la même maniére, On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos(x) &= (\sin(x))' \\ &= (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!})' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

Exemple 4 : Développement obtenu par intégration

Soit f une fonction admet un développement en série entière de rayon de C.V. R C. à d. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \forall x \in]-R, R[$

Par Integration on a $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \forall x \in]-R, R[$

Comme exemple : : $x \to \ln(1+x)$

On a : On sait déja que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad$ si$x \in]-1, 1[$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

$etona \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$

Alors $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$

$\Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in]-1, 1[$

D'où $\forall x \in]-1, 1[, \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

en remplaçant x par $-x$

Donc $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in]-1, 1[$

Donc, $\forall x \in]-1, 1[$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$$

Exemple 5 : Développement par dérivations :

soit f une fonction qui admet un développement en série entière de rayon de CV R ie $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \forall x \in]-R, R[$

Par dérivation on a :

$$f^{'}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\qquad \forall x\in]-R,R[$$

comme exemple : $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

On a $\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\qquad \forall x\in]-1,1[$

Donc $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})^{'}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

Exemple 6 : Développement de $(1+x)^\alpha$ $\qquad \alpha\in\mathbb{R}$

On pose $f(x)=(1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,+\infty[$
on a $f^{'}(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\alpha\frac{(1+x)^\alpha}{1+x}\frac{\alpha f(x)}{1+x}$
$\Rightarrow \qquad f(x)$ est une solutionde l'équation :

$$\begin{cases} (1+x)y'(x)-\alpha y(x) = 0 \qquad (1)\\ y(0)=1. \end{cases}$$

Chercgons une solution y de (1) qui admet un dévoloppement en série entière.

On pose $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$

on a $y^{'}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$

en remplaçent de (1)

$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a^{n+1}+na_n-\alpha a_n]x^n=0$

Par identification on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$(n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n=0$
On a $y(0)=1\Rightarrow a_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$a_{n+1}=\frac{\alpha-n}{n+1}a_n$ on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha a_0=\alpha\\ a_2 &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\\ a_3 &= \frac{(\alpha-2)}{3}a_2\\ &= \frac{(\alpha-2)}{3}\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\\ &\vdots\\ a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \end{aligned}$$

D'où

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

On a le rayon de C.V R est
$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1}}=1$
Par unicité des sol. de l'éq. (1) on a $\forall x\in]-1,1[$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Exemple : :
Le développement en série entière de la fonction $x\mapsto \arctan(x)$
On a $(\arctan(x))^{'}=\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$
On pose $\alpha=-1$ et $x\to x^2$

$$(1+x^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

En prenant la primitive de ctte série on a alors.
$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad \forall x\in]-1,1[$
le rayon de CV de cette série est $\underline{R=1}$
Pour $x=1$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée convergente.
Si $x=-1$ On a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ est une série alternée convergente.
D'où

$$\boxed{\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad \forall x\in[-1,1]}$$

9 Reduction d'équations différetielles.

On peut résoudre certaines équations différetielles en cherchant leurs solutions y sous la forme d'une série entière.
La méthode est la suivante :

1. On pose $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$
2. chercher une relation de récurence vérifiée la suite (a_n).
3. Résoudre cette relation de récurence.
4. Remplacer a_n dans l'expression de y et déterminer le rayon de CV.

Exemple :
Soit l'équation différentielle

$$xy^{"}+2y^{'}-xy=0 \tag{4.1}$$

cherchons les solutions y développable en série entière.

Pn pose $y=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $y^{'}=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y^{"}=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ En remplaçant dans l'équation (1) on a :

$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=0$

$\overset{n^{'}=n-2}{\Rightarrow} \sum_{n^{'}=0}^{+\infty}(n^{'}+2)(n^{'}+1)a_{n^{'}+2}x^{n^{'}+1}+2a_1+\sum_{n^{'}=0}^{+\infty} 2(n^{'}+2)a_{n^{'}+2}x^{n^{'}+1}-\sum_{n^{'}=0}^{+\infty} a_{n^{'}}x^{n^{'}+1}=0$

$$\Rightarrow 2a_1+\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+2)a_{n+2}-a_n]x^{n+1}=0$$

Par identification ;on a

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+2} &= \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

puisque $a_1=0$ on a alors $a_3=\frac{a_1}{12}=0,\qquad a_5=\frac{a_3}{5\times 6}=0\Rightarrow a_{2n+1}=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$
et on a
$a_2=\frac{a_0}{2\times 3},\quad a_4=\frac{a_2}{4\times 5}=\frac{a_0}{2\times 3\times 4\times 5}$
D'où, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{a_{2n-2}}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{a_{2n-4}}{2n(2n+1)(2n-2)(2n-1)} \\ &= \frac{a_0}{2n(2n+1)(2n-2)(2n-1)\cdots 4\times 5\times 2\times 3} \\ &= \frac{a_0}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

D'où $=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!},\qquad \forall a_0$

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, && \forall a_0 \\ &= \frac{a_0}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, && \text{Si} x\neq 0 \\ &= \frac{a_0}{x}Sh(x) && \text{Si} x\neq 0. \end{aligned}$$

D'où la solution développable en série entière de (1) est donné par :

$$y(x)=\begin{cases} \frac{a_0}{x}Sh(x) & \text{si } x\neq 0 \\ a_0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Fin de Module

Bon Courage